11.1.1 Přehled středoškolské matematiky

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Opakovací díl učebnice je zamýšlen jako shrnutí středoškolské matematiky a tedy buď příprava na státní maturitu vyšší úrovně, nebo na školní maturitu na škole, kde se ještě o něco snaží.
Pokud se připravujete pouze ke státní maturitě nižší úrovně, je studium celé učebnice a procházení celého opakování zbytečně náročné. V takovém případě doporučuji napsat si některý z testů a podívat se, jaký druh příkladů je problematický. U studentů, kteří matematiku nemají příliš v lásce, jde většinou o slovní úlohy a příklady založené na pochopení zadání nebo úměrnosti. V takovém případě doporučuji prostudovat zejména hodiny: 010101-010104, 010702, 010703, 010901-010904, 020115, 020210-020213, 020318-020319, 020512.
Na druhou stranu, pokud uvažujete o vysoké škole s výukou matematiky (minimálně všechny ekonomické a technické obory), měli byste zvládnout učebnici v celém rozsahu, protože nižší úroveň státní maturity z matematiky neodpovídá úrovni, která je nutná ke zvládnutí vysokoškolské matematiky.

Pedagogická poznámka: Závěrečné opakování (nebo opakovací seminář) považuji dlouhodobě za velký problém. Ve všech případech oscilovali žáci mezi dvěma extrémy:
na jedné straně byli žáci, kteří měli o opakované látce velmi slušný přehled, případně si chyby dostudovávali ještě před hodinou,
na druhé straně byli žáci, kteří si nepamatovali skoro nic a na hodinu se nepřipravovali.
Přinos hodiny pak byl velmi diskutabilní. Stručné zopakování stačí těm prvním, ale druzí z něj nic nemají, pokud se snažím postupovat pomaleji, Ti první se nudí a někteří z druhé skupiny stejně nestíhají.
Opakovací kapitoly na konci učebnice představují částečné řešení. Každá hodina odpovídá dvojhodinovému cvičení. Žáci si ji mají za úkol prohlédnout předem s tím, že nemusí všechno řešit, ale měli by se podívat na všechno, co je jim nejasné nebo už si to nepamatují. Případné dotazy se řeší během následujícího cvičení. Hlavní náplní hodiny je počítání dalších podobných příkladů s tím, že bez předchozího varování může na konci hodiny následovat písemka.

Pedagogická poznámka: Závěrečné opakování by mělo mít čtyři části. V současnosti nejvíce pracuji na shrnutí. Shrnutí by mělo postupně zahrnout veškerou látku učebnice. Cílem je zopakovat, trošku propojit poznatky a procvičit je na typových úlohách. Za typové úlohy považuji typická zadání, která v různých obměnách kolují po našich školách a tvoří většinu dostupných sbírek.
Vyšší úroveň matematiky v roce 2012 (která se mi jinak velice líbila a rozhodně bych nechtěl být počítán k jejím kritikům) ukázala (bohužel), že naší žáci jsou spíše než na matematiku připravováni právě na řešení typových úloh. Proto bych opakování v učebnici rád postupně doplnil o další tři kapitoly:
netradiční úlohy: úlohy sice středoškolské, ale netypové a proto pro žáky těžké (typickým příkladem jsou právě některá zadání zmiňované státní maturity),
komplexní úlohy: úlohy, které vyžadují znalosti z více než jedné omezené oblasti matematiky (vyžadují více než jednu oblast a schopnost upravovat výrazy,

případně počítat s goniometrickými funkcemi),
úlohy ze života: čistě praktické úlohy, které je možné řešit středoškolskou matematikou.
Více než jindy zde platí, budu vděčný za jakoukoliv úlohu nebo inspiraci.

Na matematiku se můžeme dívat jako na vrchlík koule:

- Spodní část jsou příklady a konkrétní postupy, je jich nejvíce a jsou nejdál od obecných představ (když si je nepamatujeme, musíme udělat nejvíce kroků, abychom je objevili).
- Čím výš stoupáme, tím obecnější jsou představy, o kterých mluvíme, mají větší dosah, ale také dál ke konkrétnímu použití, propojují jednotlivé konkrétnosti a drží polokouli pohromadě.

Zkusíme teď klást větší důraz na vyšší vrstvy.

Klasické rozdělení středoškolské matematiky do učebnic v běžné časové posloupnosti (středoškolská sada nakladatelství Prometheus):

- Základní poznatky
- Rovnice a nerovnice
- Planimetrie
- Funkce
- Goniometrie
- Stereometrie
- Analytická geometrie
- Komplexní čísla
- Posloupnosti
- Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika
- Diferenciální a integrální počet

Pedagogická poznámka: Následující příklad by měli žáci opravdu tvořit sami a měli by mít dostatek času (20 minut). Napíší si tak přehled toho, o čem mají alespoň trochu představu a při společné kontrole uvidí, které části matematiky se jim nejvíce vypařily z hlavy.

Př. 1: Ke každému z uvedených titulů dopiš, čím se zabývá. Ke každému z uvedených titulů dopiš, jaké má vazby s ostatními tituly.

Základní poznatky: opakování ZŠ, číselné obory, množiny, výroky, dělitelnost, úpravy výrazů (mocniny, mnohočleny, lomené výrazy, vyjadřování ze vzorce).
Rovnice a nerovnice: rovnice (lineární, kvadratické, s absolutní hodnotou, s odmocninou, součinový a podílový tvar), nerovnice (analogické typy k rovnicím), soustavy rovnic, substituce, rovnice a nerovnice s parametrem.
Planimetrie (geometrie v rovině): základní útvary, početní příklady (Pythagorova věta, Euklidovy věty, mocnost bodu ke kružnici), obsahy útvarů, konstrukce (trojúhelníky, čtyřúhelníky, kružnice), shodnosti a podobnosti (osová a středová souměrnost, posunutí, otočení, stejnolehlost).
Funkce: funkce (lineární, s absolutní hodnotou, kvadratické, lineární lomené, mocninné, odmocnina, exponenciální, logaritmické), vlastnosti funkcí (rostoucí, klesající, prostá, sudá, lichá, omezená, maximum, minimum, inverzní), exponenciální rovnice a nerovnice, logaritmické rovnice a nerovnice.

Goniometrie: úhel (převod radiány – stupně, základní velikost úhlu), goniometrické funkce pomoci jednotkové kružnice, vlastnosti goniometrických funkcí, goniometrické rovnice a nerovnice, goniometrické vzorce, trigonometrie (řešení obecného trojúhelníka).
Stereometrie (geometrie v prostoru): obrazy ve volném rovnoběžném promítání, vzájemná poloha přímek a rovin, řezy, průniky přímky s rovinou a tělesem, metrické vlastnosti (výpočty úhlů a vzdáleností), povrchy a objemy těles.
Analytická geometrie (geometrie pomocí rovnic a nerovnic): souřadnice, vektory (skalární a vektorový součin), geometrie v rovině (přímka, vzdálenosti, úhly), geometrie v prostoru (přímka, rovina, vzdálenosti a úhly), kuželosečky (kružnice, elipsa, parabola, hyperbola, tečny).
Komplexní čísla: $i^2 = -1$, zavedení operací, řešení rovnic, Gaussova rovina, goniometrický tvar (mocniny), binomické rovnice.
Posloupnosti: vyjádření *n*-tým členem, rekurentní vyjádření, matematická indukce, aritmetická a geometrická posloupnost, finanční matematika, limita posloupnosti, nekonečná řada.
Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika: kombinatorická pravidla, variace, permutace, kombinace (vše s opakováním i bez), kombinační čísla, binomická věta, pravděpodobnost, binomické rozdělení, charakteristiky polohy a variability.
Diferenciální a integrální počet: limity, spojitost, derivace, integrály.

Základní poznatky: úpravy výrazů se používají téměř všude.
Rovnice a nerovnice: Například $ax^2 + bx + c = 0$ je otázka po nulové hodnotě funkce $y = ax^2 + bx + c$ $\Rightarrow$ funkce nám říkají, jak vypadají řešení odpovídajících rovnic a nerovnic.
Planimetrie (geometrie v rovině).
Goniometrie: jde o funkce a rovnice založené na goniometrických funkcí (mohlo jíž o další kapitolu po logaritmech).
Stereometrie (geometrie v prostoru): podobné problémy jako v rovině, při výpočtech převádíme příklady do vhodné roviny.
Analytická geometrie (geometrie pomocí rovnic a nerovnic): planimetrické a stereometrické problémy řešené pomocí rovnic a nerovnic.
Komplexní čísla: zavedení další číselné množiny, řešení rovnic pomocí těchto čísel, využití goniometrický funkcí.
Posloupnosti: funkce se speciálním definičním oborem (aritmetická posloupnost – lineární funkce, geometrická posloupnost – exponenciální funkce).

Tabulky (Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy)
Povolená pomůcka u státních maturit, většiny školních maturit a některých přijímacích zkoušek.
Výhody: je možné najít přesná znění většiny středoškolských vzorců.
Nevýhody:

- často jiné značení než v učebnicích,
- jiné řazení,
- některé "měkké" informace chybí,
- některé části obsahují trochu jiné vzorce než učebnice (finanční matematika),
- pokud o problematice nemáte ani páru, tabulky Vám nepomůžou (jak už jsem při maturitě viděl několikrát).

Př. 2: Projdi Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy. Které části se týkají matematiky. Najdi stránky pro jednotlivé učebnice gymnaziální sady.

Př. 3: Najdi střed a další charakteristiky elipsy $9x^2+4y^2-54x+8y+49=0$.

Střed elipsy zjistíme ze středového tvaru její rovnice (zadaná rovnice připomíná obecný tvar rovnice elipsy) $\Rightarrow$ pokusíme se rovnici převést na středový tvar doplněním na čtverec.

$9x^2+4y^2-54x+8y+49=0$

$9x^2-54x+4y^2+8y+49=9\left(x^2-6x\right)+4\left(y^2+2y\right)+49=0$

$9\left(x^2-2x\cdot 3+3^2-3^2\right)+4\left(y^2+2y\cdot 1+1^2-1^2\right)+49=0$

$9\left[\left(x-3\right)^2-9\right]+4\left[\left(y+1\right)^2-1\right]+49=9\left(x-3\right)^2-81+4\left(y+1\right)^2-4+49=0$

$9\left(x-3\right)^2+4\left(y+1\right)^2=36 \quad /:36$

$\frac{\left(x-3\right)^2}{4}+\frac{\left(y+1\right)^2}{9}=1 \Rightarrow S\left[3;-1\right],\ a=2, b=3 \Rightarrow$ "stojatá" elipsa.

$e^2=b^2-a^2=3^2-2^2=5 \Rightarrow e=\sqrt{5}$

Hlavní vrcholy (posunuté od středu o b ve svislém směru): $C\left[3;-4\right]$; $D\left[3;2\right]$.

Vedlejší vrcholy (posunuté od středu o a ve vodorovném směru): $A\left[1;-1\right]$, $B\left[5;-1\right]$.

Ohniska (posunutá od středu o e ve svislém směru): $F\left[3;-1+\sqrt{5}\right]$, $E\left[3;-1-\sqrt{5}\right]$.

Na předchozím příkladu je dobré si všimnout dvou věcí:

- konkrétní údaje (středový tvar rovnice elipsy, význam jednotlivých konstant) je v tabulkách najdeme daleko snáze než obecné nekonkrétní představy,
- obecná představa (musím rovnici upravit tak, abych vytvořil vzorce $a^2+2ab+b^2$, které převedu na závorku $\left(a+b\right)^2$) vyžaduje více přemýšlení při konkrétním uplatnění než manuální postup, ale je méně citlivá na zapomínání.

Konkrétní znalost (přesná znalost kroků při doplňování na čtverec) x **obecná představa** (potřeba získat vzorec $a^2+2ab+b^2=\left(a+b\right)^2$)

Konkrétní znalost umožňuje automatičtější postup při výpočtu, ale nese velké riziko omylu.

Př. 4: Nakresli graf funkce $y=-\left(2x+1\right)^2+2$.

Obecná představa: řešíme metodou napodobení výpočtu.

Platí: $y=-\left(2x+1\right)^2+2=-f\left(2x+1\right)+2$, kde $f\left(x\right)=\left(\ \right)^2$.

Zvolíme x

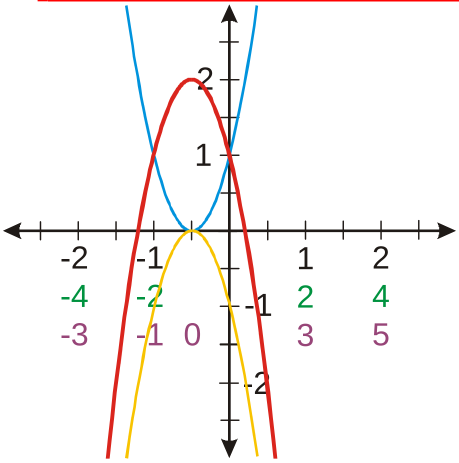
Vypočteme $2x$

Vypočteme $\left(2x+1\right)$

Nakreslíme funkci $y = f(2x+1) = (2x+1)^2$

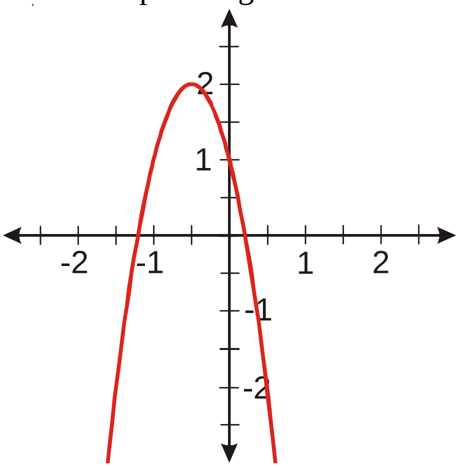
Nakreslíme funkci $y = -f(2x+1) = -(2x+1)^2$

Nakreslíme funkci $y = -f(2x+1) + 2 = -(2x+1)^2 + 2$



Konkrétní znalost: Rozebereme jednotlivé konstanty v předpisu vzorce a zapíšeme si jejich vliv na tvar grafu: $y = -(2x+1)^2 + 2 = -\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 2$

- $-$: převrací graf podél vodorovné osy,
- 2: zúží graf na polovinu ve směru osy x,
- $\frac{1}{2}$: posune graf o $\frac{1}{2}$ doleva,
- 2: posune graf o 2 nahoru.



Pedagogická poznámka: Cílem obou předchozích příkladů je ukázat žákům, že jejich znalosti by měly stát spíše na obecných představách než na konkrétních znalostech. Pokud začínáte opakovat na začátku čtvrtého ročníku (nebo ještě později), uplyne od probrání obou příkladů tolik času, že použitelné konkrétní znalosti nebude mít skoro nikdo a oba příklady nepatří mezi ty, které je možné vyřešit podle tabulek.

Shrnutí: